

OPERACIONES CON POLINOMIOS

1) Suma y resta de polinomios

Para sumar polinomios se suman los monomios semejantes y se deja indicado el resto de las operaciones.

$$P(x) = 3x^2 - 5x + 2 \quad Q(x) = 3x^3 - x^2 - 7$$

$$P(x) + Q(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5x - 5$$

La resta de polinomios es la suma del primer polinomio con el opuesto del segundo, por tanto, se restan los monomios semejantes y se deja indicado el resto de las operaciones.

$$P(x) = 3x^2 - 5x + 2 \quad Q(x) = 3x^3 - x^2 - 7$$

$$-Q(x) = -3x^3 + x^2 + 7$$

$$P(x) - Q(x) = P(x) + (-Q(x)) = 3x^2 - 5x + 2 - 3x^3 + x^2 + 7 = -3x^3 + 4x^2 - 5x + 9$$

2) Multiplicación de un monomio por un polinomio

Para multiplicar un monomio por un polinomio se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio.

$$(3x^2) \cdot (2x^3 + 5x^2 - 7) = 6x^5 + 15x^4 - 21x^2$$

3) Multiplicación de polinomios

Para multiplicar dos polinomios se multiplican los términos del primero por cada uno de los del segundo y se reducen los términos semejantes.

$$R(x) = 5x^3 + x - 1$$

$$S(x) = 2x^2 - 1$$

$$R(x) \cdot S(x) = (5x^3 + x - 1) \cdot (2x^2 - 1) =$$

$$= (5x^3) \cdot (2x^2) + (5x^3) \cdot (-1) + (x) \cdot (2x^2) + (x) \cdot (-1) + (-1) \cdot (2x^2) + (-1) \cdot (-1) =$$

$$= 10x^5 - 5x^3 + 2x^3 - x - 2x^2 + 1 = 10x^5 - 3x^3 - 2x^2 - x + 1$$

4) Potencia de un binomio. Identidades notables

El cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primero mas o menos el doble producto del primero por el segundo mas el cuadrado del segundo.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(3x + y)^2 = 9x^2 + 2(3x)y + y^2 = 9x^2 + 6xy + y^2$$

$$(5 - xy)^2 = 25 - 2 \cdot 5xy + (xy)^2 = 25 - 10xy + x^2y^2$$

Suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados.

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(3 - xy)(3 + xy) = 9 - x^2y^2$$

5) División de polinomios entre monomios

El cociente, es la suma de los cocientes que resultan de dividir cada término del polinomio entre el monomio. El resultado no es necesariamente un polinomio.

Ejemplo:

$$(24x^2y^3 - 9x^3z^2 + 3yz^2) \div (6x^3yz) = \frac{24x^2y^3}{6x^3yz} - \frac{9x^3z^2}{6x^3yz} + \frac{3yz^2}{6x^3yz} = 4x^{-1}yz^{-1} - \frac{3}{2}zy^{-1} + \frac{1}{2}x^{-3}z$$

no es un polinomio.

$$(7a^4b^2c - 4a^3b) \div (2a^3b) = \frac{7a^4b^2c}{2a^3b} - \frac{4a^3b}{2a^3b} = \frac{7}{2}abc - 2$$

Sí es un polinomio

6) División de un polinomio entre otro polinomio

Dados los polinomios $P(x) = x^5 + 2x^3 - x - 8$ $Q(x) = x^2 - 2x + 1$

$P(x) : Q(x)$

A la izquierda situamos el dividendo. Si el polinomio no es completo dejamos huecos en los lugares que correspondan.

$$x^5 \quad + 2x^3 \quad - x - 8 \quad \bigg| \quad x^2 - 2x + 1$$

A la derecha situamos el divisor dentro de una caja.

Dividimos el primer monomio del dividendo entre el primer monomio del divisor.

$$x^5 : x^2 = x^3$$

Multiplicamos cada término del polinomio divisor por el resultado anterior y lo restamos del polinomio dividendo (o sea, lo colocamos con el signo cambiado y lo sumamos):

$$\begin{array}{r}
 x^5 \qquad \qquad + 2x^3 \qquad \qquad - x - 8 \\
 \underline{-x^5 + 2x^4 - x^3} \\
 2x^4 + x^3 \qquad \qquad - x - 8
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 | \ x^2 - 2x + 1 \\
 \underline{x^3}
 \end{array}$$

De nuevo procedemos igual:

$$2x^4 : x^2 = 2x^2$$

$$\begin{array}{r}
 x^5 \qquad \qquad + 2x^3 \qquad \qquad - x - 8 \\
 \underline{-x^5 + 2x^4 - x^3} \\
 2x^4 + x^3 \qquad \qquad - x - 8 \\
 \underline{-2x^4 + 4x^3 - 2x^2} \\
 5x^3 - 2x^2 - x - 8
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 | \ x^2 - 2x + 1 \\
 \underline{x^3 + 2x^2}
 \end{array}$$

Una vez más

$$5x^3 : x^2 = 5x$$

$$\begin{array}{r}
 x^5 \qquad \qquad + 2x^3 \qquad \qquad - x - 8 \\
 \underline{-x^5 + 2x^4 - x^3} \\
 2x^4 + x^3 \qquad \qquad - x - 8 \\
 \underline{-2x^4 + 4x^3 - 2x^2} \\
 5x^3 - 2x^2 - x - 8 \\
 \underline{-5x^3 + 10x^2 - 5x} \\
 8x^2 - 6x - 8
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 | \ x^2 - 2x + 1 \\
 \underline{x^3 + 2x^2 + 5x}
 \end{array}$$

Y por último...

$$8x^2 : x^2 = 8$$

$$\begin{array}{r}
 x^5 \qquad \qquad + 2x^3 \qquad \qquad - x - 8 \\
 \underline{-x^5 + 2x^4 - x^3} \\
 2x^4 + x^3 \qquad \qquad - x - 8 \\
 \underline{-2x^4 + 4x^3 - 2x^2} \\
 5x^3 - 2x^2 - x - 8 \\
 \underline{-5x^3 + 10x^2 - 5x} \\
 8x^2 - 6x - 8 \\
 \underline{-8x^2 + 16x - 8} \\
 10x - 16
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 | \ x^2 - 2x + 1 \\
 \underline{x^3 + 2x^2 + 5x + 8}
 \end{array}$$

10x - 16 es el **resto**, porque su **grado es menor que el del divisor** y por tanto no se puede continuar dividiendo.

$x^3 + 2x^2 + 5x + 8$ es el **cociente**, o sea el resultado de la división.

Ejercicios resueltos de operaciones con polinomios:**1) Calcula las siguientes sumas para los siguientes polinomios:**

$$P(x) = 5x^2 - 7x + 3$$

$$Q(x) = -5x^2 + 2x$$

$$R(x) = x^3 + x^2 + 2$$

a) $P(x) + Q(x)$

$$a) P(x) + Q(x) = 5x^2 - 7x + 3 - 5x^2 + 2x =$$

$$= 5x^2 - 5x^2 - 7x + 2x + 3 = -5x + 3$$

b) $P(x) + R(x)$

$$b) P(x) + R(x) = 5x^2 - 7x + 3 + x^3 + x^2 + 2 =$$

$$= x^3 + 5x^2 + x^2 - 7x + 3 + 2 = x^3 + 6x^2 - 7x + 5$$

c) $Q(x) + R(x)$

$$c) Q(x) + R(x) = -5x^2 + 2x + x^3 + x^2 + 2 =$$

$$= x^3 - 5x^2 + x^2 + 2x + 2 = x^3 - 4x^2 + 2x + 2$$

2) Hallar el polinomio diferencia entre:

a) $P(x) = x^4 + x^2 + 2$ y $Q(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

$$a) P(x) - Q(x) = x^4 + x^2 + 2 - (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) =$$

$$= x^4 + x^2 + 2 - x^3 + 2x^2 + 5x - 6 = x^4 - x^3 + 3x^2 + 5x - 4$$

b) $P(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ y $Q(x) = 2x^2 + 3x + 4$

$$b) P(x) - Q(x) = x^3 + x^2 - x + 1 - (2x^2 + 3x + 4) =$$

$$= x^3 + x^2 - x + 1 - 2x^2 - 3x - 4 = x^3 - x^2 - 4x - 3$$

c) $P(x) = x^5 - 2x^3 + 4x^2 - 6$ y $Q(x) = x^5 + x^4 + 3x^2 + 4x + 5$

$$\begin{aligned} \text{c) } P(x) - Q(x) &= x^5 - 2x^3 + 4x^2 - 6 - (x^5 + x^4 + 3x^2 + 4x + 5) = \\ &= x^5 - 2x^3 + 4x^2 - 6 - x^5 - x^4 - 3x^2 - 4x - 5 = -x^4 - 5x^3 + x^2 - 4x - 11 \end{aligned}$$

3) Calcula y simplifica:

a) $(x^2 - 5x + 1) - (3x - 1) + (2x^2 + 3x - 1) - (x^3 + 2x - 5)$

$$\begin{aligned} (x^2 - 5x + 1) - (3x - 1) + (2x^2 + 3x - 1) - (x^3 + 2x - 5) &= \\ = x^2 - 5x + 1 - 3x + 1 + 2x^2 + 3x - 1 - x^3 - 2x + 5 &= -x^3 + 3x^2 - 7x + 6 \end{aligned}$$

4) Sean $P(x) = x^2 - 4x + 2$ y $Q(x) = 2x^3 + x^2 + 5$. Calcular:

a) $-2P(x)$

$$\text{a) } -2P(x) = -2(x^2 - 4x + 2) = -2x^2 + 8x - 4$$

b) $4Q(x)$

$$\text{b) } 4Q(x) = 4(2x^3 + x^2 + 5) = 8x^3 + 4x^2 + 20$$

c) $3P(x) - 2Q(x)$

$$\begin{aligned} \text{c) } 3P(x) - 2Q(x) &= 3(x^2 - 4x + 2) - 2(2x^3 + x^2 + 5) = \\ &= 3x^2 - 12x + 6 - 4x^3 - 2x^2 - 10 = -4x^3 + x^2 - 12x - 4 \end{aligned}$$

5) Hallar los siguientes productos:

a) $(-2x^2)(x^5 - 4x^2 + 3x + 1)$

$$a) (-2x^2)(x^5 - 4x^2 + 3x + 1) = -2x^7 + 8x^4 - 6x^3 - 2x^2$$

$$b) (x^2 - 1)(5x^5)$$

$$b) (x^2 - 1)(5x^5) = 5x^7 - 5x^5$$

$$c) (-3x^3)(2x^4 - 3x^3 + 2x - x + 3)$$

$$c) (-3x^3)(2x^4 - 3x^3 + 2x - x + 3) = -6x^7 + 9x^6 - 6x^4 + 3x^4 - 9x^3 = -6x^7 + 9x^6 - 3x^4 - 9x^3$$

6) Hallar los siguientes productos:

$$a) P(x) = 5x^2 + 3x - 1 \quad y \quad Q(x) = x + 2$$

$$\begin{aligned} a) P(x) \cdot Q(x) &= (5x^2 + 3x - 1) \cdot (x + 2) = (5x^2 + 3x - 1)x + (5x^2 + 3x - 1)2 = \\ &= 5x^3 + 3x^2 - x + 10x + 2 + 6x - 2 = 5x^3 + 13x^2 + 5x \end{aligned}$$

$$b) P(x) = x^3 + 1 \quad y \quad Q(x) = x^2 + x + 1$$

$$b) P(x) \cdot Q(x) = (x^3 + 1) \cdot (x^2 + x + 1) = x^3(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$c) P(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1 \quad y \quad Q(x) = x^2 - 1$$

$$\begin{aligned} c) P(x) \cdot Q(x) &= (x^3 + 2x^2 + x + 1) \cdot (x^2 - 1) = (x^3 + 2x^2 + x + 1)x^2 - (x^3 + 2x^2 + x + 1) \\ &= x^5 + 2x^4 + x^3 + x^2 - x^3 - 2x^2 - x - 1 = x^5 + 2x^4 - x^2 - x - 1 \end{aligned}$$

$$d) P(x) = -x^3 + 4x - 3 \quad y \quad Q(x) = x^2 + 3x + 4$$

$$\begin{aligned} d) P(x) \cdot Q(x) &= (-x^3 + 4x - 3) \cdot (x^2 + 3x + 4) = -x^3(x^2 + 3x + 4) + 4x(x^2 + 3x + 4) - \\ &3(x^2 + 3x + 4) = -x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 4x^3 + 12x^2 + 16x - 3x^2 - 9x - 12 = \\ &= -x^5 - 3x^4 + 9x^2 + 7x - 12 \end{aligned}$$

7) Desarrolla las identidades notables.

a) $(x + 5)^2$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$$

b) $(2x - 5)^2$

$$(2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = 4x^2 - 20x + 25$$

c) $(2x - 5)^2$

$$(2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = 4x^2 - 20x + 25$$

d) $\left(x^2 - \frac{1}{2}x\right)^2$

$$= (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = x^4 - x^3 + \frac{1}{4}x^2$$

e) $(3x - 2) \cdot (3x + 2)$

$$(3x)^2 - 2^2 = 9x^2 - 4$$

f) $(x + 5) \cdot (x - 5)$

$$x^2 - 25$$

g) $(3x - 2) \cdot (3x + 2)$

$$(3x)^2 - 2^2 = 9x^2 - 4$$

h) $(3x - 5) \cdot (3x - 5)$

$$(3x)^2 - 5^2 = 9x^2 - 25$$

8) Efectúa las siguientes divisiones indicando cual es el polinomio cociente y el polinomio resto:

a) $(x^3 + 4x^2 + 6) : (x - 4)$

x^3	$+ 4x^2$	$+ 12$	$x - 4$
$- x^3$	$+ 4x^2$	↓	$x^2 + 8x + 32$
$+ 8x^2$			
$- 8x^2$	$+ 32x$	↓	
$+ 32x$			
	$- 32x$	$+ 128$	
$+ 140$			

Por tanto, $C(x) = x^2 + 8x + 32$ $R(x) = 140$

b) $(x^3 - 1) : (x - 1)$

$$\begin{array}{r} \cancel{x^3} \\ - \cancel{x^3} + x^2 \\ \hline \phantom{- \cancel{x^3}} + \cancel{x^2} \\ \phantom{- \cancel{x^3}} - \cancel{x^2} + x \\ \hline \phantom{- \cancel{x^3}} \phantom{- \cancel{x^2}} + \cancel{x} - 1 \\ \phantom{- \cancel{x^3}} \phantom{- \cancel{x^2}} - \cancel{x} + 1 \\ \hline \phantom{- \cancel{x^3}} \phantom{- \cancel{x^2}} \phantom{- \cancel{x}} 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \overline{) x - 1} \\ x^2 + x + 1 \end{array}$$

Por tanto, $C(x) = x^2 + x + 1$ $R(x) = 0$

c) $(4x^3 - 8x^2 - 9x + 10) : (2x - 3)$

$$\begin{array}{r}
 \cancel{4x^3} - 8x^2 - 9x + 10 \\
 \cancel{-4x^3} + 6x^2 \quad \downarrow \\
 \hline
 \quad \cancel{-2x^2} - 9x \\
 \quad \quad \cancel{+2x^2} - 3x \quad \downarrow \\
 \hline
 \qquad \quad \cancel{-12x} + 10 \\
 \qquad \quad \cancel{+12x} - 18 \\
 \hline
 \qquad \qquad -8
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 2x - 3 \\
 \hline
 2x^2 - x - 6
 \end{array}$$

Por tanto, $C(x) = 2x^2 - x - 6$ $R(x) = -8$

9) Realiza la siguientes divisiones:

a) $(x^6 - 3x^2 + 5x - 8) : (x^2 - 3x + 1)$

$$\begin{array}{r}
 \cancel{x^6} \qquad \qquad \qquad -3x^2 \qquad +5x \qquad -8 \\
 \hline
 \cancel{-x^6} \qquad +3x^5 \qquad -x^4 \qquad \downarrow \\
 \hline
 \cancel{+3x^5} \qquad -x^4 \qquad \qquad \qquad \downarrow \\
 \hline
 \cancel{-3x^5} \qquad +9x^4 \qquad -3x^3 \qquad \downarrow \\
 \hline
 \qquad \cancel{+8x^4} \qquad -3x^3 \qquad -3x^2 \\
 \qquad \cancel{-8x^4} \qquad +24x^3 \qquad -8x^2 \qquad \downarrow \\
 \hline
 \qquad \qquad \cancel{+21x^3} \qquad -11x^2 \qquad +5x \\
 \qquad \qquad \cancel{-21x^3} \qquad +63x^2 \qquad -21x \qquad \downarrow \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad \cancel{+52x^2} \qquad -16x \qquad -8 \\
 \qquad \qquad \qquad \cancel{-52x^2} \qquad +156x \qquad -52 \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad \text{Resto} \qquad \Rightarrow \qquad +140x \qquad -60
 \end{array}$$

b) $(x^5 - x^3 + x) : (x^2 + 1)$

x^5	$-x^3$	$+x$	$x^2 + 1$
$-x^3$	$-x^3$	\downarrow	$x^3 - 2x$
	$-2x^3$	$+x$	\uparrow
	$+2x^3$	$+2x$	Cociente
Resto	\Rightarrow	$+3x$	